



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

01F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۴/۵

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته ریاضی)

مدت پاسخ گویی: ۸۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۵۵

طراحان سؤال	ویراستاران
حسابان: حسین شفیع زاده و مهرداد کیوان	ارسلان حسنون
هندسه: سیروس نصیری	سید جواد نظری
گسسته: نوید یکتا	

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- اگر $A = \frac{6 - \sqrt{24}}{\sqrt{6} - 2} - (\sqrt{36} - 2)^{-2}$ ، ساده شده A کدام است؟

$-\sqrt{6}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{2}$ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا تک تک کسرها را ساده می کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} - \sqrt{4})}{\sqrt{6} - 2} - \frac{1}{(\sqrt{6} - 2)^2} = \sqrt{6} - \frac{1}{6 + 4 - 4\sqrt{6}}$$

به کمک اتحاد مزدوج کسر دوم را گویا می کنیم و داریم:

$$A = \sqrt{6} - \frac{1}{10 - 4\sqrt{6}} \times \frac{10 + 4\sqrt{6}}{10 + 4\sqrt{6}}$$

$$A = \sqrt{6} - \frac{10 + 4\sqrt{6}}{100 - 96} \Rightarrow A = \sqrt{6} - \left(\frac{5}{2} + \sqrt{6}\right) \Rightarrow A = \sqrt{6} - \frac{5}{2} - \sqrt{6} = -\frac{5}{2}$$

۲- در یک دنباله هندسی، جمله چهارم برابر ۸ است. مجموع ۷ جمله اول این دنباله، چند برابر مجموع معکوس های همان جملات است؟

۷۲ (۴)

۶۸ (۳)

۶۴ (۲)

۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: در یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

۱) $a_4 = 8 \Rightarrow a_1 q^3 = 8$

۲) $a_1, a_1 q, \dots \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1 q}, \dots$

$$\frac{S_1}{S_7} = \frac{\frac{a_1(1 - q^7)}{1 - q}}{\frac{1}{a_1} \left(1 - \frac{1}{q^7}\right)} = \frac{\frac{a_1(1 - q^7)}{1 - q}}{\frac{q(q^7 - 1)}{a_1 q^7 (q - 1)}} = \frac{a_1^2 q^6}{(-1)(-1)} = (a_1 q^3)^2 = 8^2 = 64$$

۳- دامنه تابع $f(x) = 2 - \sqrt{a + bx - x^2}$ بازه $[-3, 1]$ است، برد f کدام است؟

$[0, 2]$ (۴)

$(-\infty, 2]$ (۳)

$[-2, 0]$ (۲)

$[-1, +\infty)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



نکته: اگر α و β ریشه‌های $ax^2 + bx + c = 0$ و $a < 0$ باشد، آنگاه جواب نامعادله $ax^2 + bx + c \geq 0$ به صورت $\alpha \leq x \leq \beta$ است.

چون جواب $a + bx - x^2 \geq 0$ به صورت $-3 \leq x \leq 1$ است، پس $x = -3$ و $x = 1$ ریشه‌های $-x^2 + bx + a = 0$ هستند.

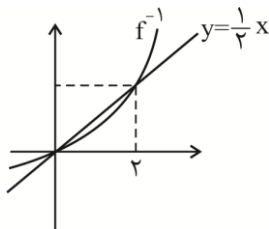
$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow -1+b+a=0 \\ x=-3 \Rightarrow -9-3b+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 - \sqrt{3 - 2x - x^2} = 2 - \sqrt{4 - (x+1)^2}$$

حداقل $(x+1)^2$ برابر صفر است که به ازای $x = -1$ به دست می‌آید، پس:

$$0 \leq (x+1)^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$$

۴- نمودار وارون تابع f به صورت مقابل است، مجموعه جواب نامعادله $xf(x) - 2x^2 < 0$ کدام است؟



(۱) $(1, +\infty)$

(۲) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

(۳) $(0, 1)$

(۴) $(-\infty, 0)$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: اگر f اکیداً صعودی و پیوسته و $f(a) \leq b$ باشد، آنگاه $a \leq f^{-1}(b)$ است. در واقع می‌توانیم از دو طرف نامساوی f یا f^{-1} بگیریم. با توجه به شکل می‌نویسیم:

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq f^{-1}(x)$$

$$x = 2t \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow t \geq f^{-1}(2t) \Rightarrow f(t) \geq 2t$$

پس در بازه $[0, 1]$ نامساوی $f(x) - 2x \geq 0$ برقرار است. حال، $x(f(x) - 2x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.

x	-	۰	+	۱
x	-	۰	+	+
$f(x) - 2x$	-	۰	+	-
$x(f(x) - 2x)$	+	+	+	-

$x > 1 \Rightarrow$ جواب

۵- اگر $f(x) = x + \sqrt{x+2}$ ، مجموعه جواب نامعادله $-1 \leq f^{-1}(x) \leq 2$ کدام است؟

(۴) $[0, 4]$

(۳) $[0, 2]$

(۲) $[-2, 0]$

(۱) $[-2, 4]$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر f پیوسته و اکیداً صعودی باشد، آنگاه:

$$f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq f^{-1}(b)$$

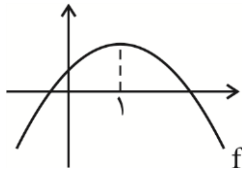
از طرفین نامساوی، f می‌گیریم، چون f اکیداً صعودی است.

$$-1 \leq f^{-1}(x) \leq 2 \Rightarrow f(-1) \leq f(f^{-1}(x)) \leq f(2) \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۶- اگر α, β صفرهای سهمی $f(x) = ax^2 + bx - 3a$ باشند، مقدار $A = \alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟



- (۱) ۷
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۳

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ بین ریشه‌ها، روابط زیر برقرار است:

۱) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و ۲) $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

طول رأس سهمی برابر $1 = -\frac{b}{2a}$ است، پس $\frac{b}{a} = -2$ است.

در سهمی داده شده روابط P و S را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{-3a}{a} = -3 \end{cases}$$

حال $\alpha^2 + \beta^2$ را به کمک اتحادها می‌یابیم:

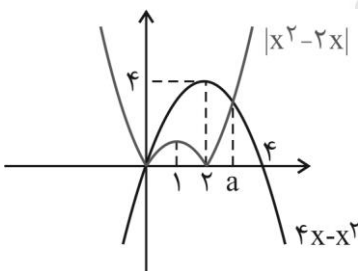
$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 4 + 6 = 10$$

۷- مجموعه جواب نامعادله $|x-2| < \frac{4x-x^2}{|x|}$ کدام است؟

- (۱) (۰, ۲) (۲) (۰, ۳) (۳) (۲, ۳) (۴) (۳, ۴)

پاسخ: گزینه ۲

نامعادله را به صورت $|x| \cdot |x-2| < 4x - x^2$ و یا $|x^2 - 2x| < 4x - x^2$ می‌نویسیم و دو طرف نامساوی را رسم می‌کنیم.



جواب نامعادله بازه $(0, 4)$ است، حال a را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 - 2x = 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 6x \Rightarrow x = 3$$

پس جواب بازه $(0, 3)$ است.

۸- اختلاف ریشه‌های معادله $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{8}{9}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

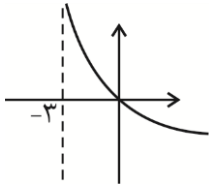
هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ابتدا $\sqrt{x}$ را به سمت راست منتقل کرده و سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow 2x+1 = (\sqrt{x}+1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 4 \Rightarrow x_1 - x_2 = 4$$



۹- با فرض $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ ، نمودار تابع $y = \log_r^{f(x)}$ به صورت مقابل است، مقدار $a+b$ کدام است؟

۲ (۲)

-۱ (۱)

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: در تابع $y = \log_c(ax+b)$ خط $x = -\frac{b}{a}$ مجانب قائم است.

$$y = \log_r \frac{1}{ax+b} = -\log_r(ax+b)$$

$$\text{مجانب قائم: } x = -\frac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = 3a$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = -\log_r b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow a+b = \frac{4}{3}$$

۱۰- اگر $\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 3$ باشد، مقدار $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

۰/۴ (۴)

۰/۵ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{نکته:}$$

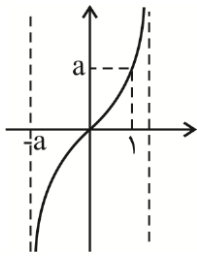
$$\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - \tan \frac{3\pi}{4}}{1 + \tan x \tan \frac{3\pi}{4}} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} \Rightarrow 3 = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

حال طبق اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ مقدار $\cos x$ را می‌یابیم:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos^2 x = \frac{4}{5}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.





۱۱- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a \tan(\pi bx)$ به صورت مقابل است، $a+b$ کدام است؟

- (۱) $2/5$
(۲) $2/75$
(۳) 2
(۴) $2/25$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: فاصله بین دو مجانب قائم متوالی تابع $y = \tan(ax + b)$ برابر یک دوره تناوب است. با توجه به شکل، دوره تناوب برابر $2a$ است.

$$T = 2a = \frac{\pi}{\pi b} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2a} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{2a}$$

چون تابع اکیداً صعودی و $a > 0$ است، پس b نیز مثبت است.
از طرفی $f(1) = a$ پس:

$$a = a \tan(\pi b) \Rightarrow \tan(\pi b) = 1 \Rightarrow \pi b = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 2/25$$

۱۲- مجموع جواب‌های معادله $1 + \sin x \cos 2x = 2 \sin^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{5\pi}{2}$ (۲) $\frac{7\pi}{2}$ (۳) $\frac{11\pi}{2}$ (۴) 3π

پاسخ: گزینه ۳

نکته: $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$$1 + \sin x \cos 2x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \cos 2x(1 + \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{2}$$

۱۳- مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2\sqrt{x} + a}{3x - \sqrt{4x + 5}}$ در صورت وجود برابر کدام عدد است؟

- (۱) $\frac{6}{7}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



نکته: قاعده هوییتال:

اگر توابع f و g مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}$ حالت مبهم $\frac{0}{0}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{g'}$.

زمانی حد وجود دارد که صورت کسر در نقطه $x=1$ برابر صفر باشد (چون مخرج برابر صفر است) پس مجاز به استفاده از هوییتال هستیم.

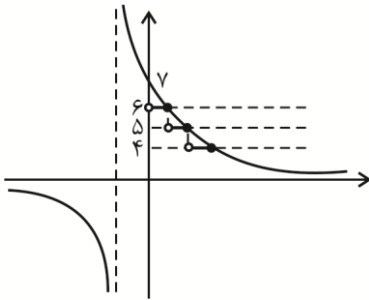
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2\sqrt{x} + a}{3x - \sqrt{4x+5}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{3 - \frac{2}{\sqrt{4x+5}}} = \frac{3-1}{3-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{6}{7}$$

۱۴- سومین نقطه ناپیوستگی تابع $f(x) = \left[\frac{7}{2x+1} \right]$ با طول مثبت کدام عدد است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا نمودار $y = \frac{7}{2x+1}$ را رسم می کنیم، چون $f(0) = 7$ پس با توجه به نزولی بودن $y = f(x)$ تابع مرتباً خطوط افقی $y = k$ را قطع می کند و در هر تلاقی یک ناپیوستگی ایجاد می کند.



لذا سومین ناپیوستگی زمانی رخ می دهد که با خط $y = 4$ تلاقی دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2x+1} = 6 &\Rightarrow 2x+1 = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{12} \text{ اولین ناپیوستگی} \\ \frac{7}{2x+1} = 5 &\Rightarrow 2x+1 = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \text{ دومین ناپیوستگی} \\ \frac{7}{2x+1} = 4 &\Rightarrow 2x+1 = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \text{ سومین ناپیوستگی} \end{aligned}$$

۱۵- با فرض $f(x) = \frac{x^2+1}{x+\sqrt{4x^2+1}}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) -۱ (۳) -۳ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید $t = \frac{1}{x}$ پس $t \rightarrow -\infty$ و از قانون پر توان استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} f(t)$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 + 1}{t + \sqrt{4t^2 + 1}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \times \frac{t^2}{t + \sqrt{4t^2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{t + (-2t)} = -1$$

۱۶- اگر $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x^2 - 3x} = 2$ باشد، مقدار $(g \circ f)'(1)$ کدام است؟

$\frac{14}{3}$ (۴)

۱۴ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته:

۱) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

۲) $(f \circ g)'(a) = g'(a) \cdot f'(g(a))$

ابتدا دقت کنید که $f'(x) = 2 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ، پس $f'(1) = \frac{7}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x(x-3)} = \frac{1}{3} g'(3) = 2 \Rightarrow g'(3) = 6$$

حال $(g \circ f)'$ را پیدا می‌کنیم:

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) \cdot g'(f(1)) = f'(1) \cdot g'(3) = \frac{7}{3} \times 6 = 14$$

۱۷- هرگاه f تابعی مشتق‌پذیر باشد به‌طوری‌که $1 + \cos 2x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$ ، مقدار $f''(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a)}{h} = mf'(a)$$

سمت چپ تساوی داده شده برابر $2f'(x)$ است، پس:

$$2f'(x) = 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = \cos^2 x$$

دوباره مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f''(x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۸- اگر $x=1$ و $x=2$ ریشه‌های تابع f' و به ترتیب طول نقطه عطف و ماکزیمم نسبی تابع f باشند، نمودار f' کدام می‌تواند باشد؟



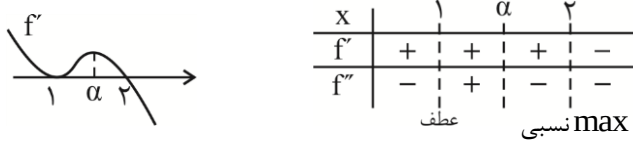
هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر f مشتق پذیر از مرتبه دوم و نمودار f' در دسترس باشد، نقطه‌ای که علامت f' عوض شود، برای f یک نقطه اکسترمم نسبی و نقطه‌ای که در نمودار f' یکنوایی آن عوض می‌شود، برای f یک نقطه عطف است.

با توجه به فرض مسأله، در $x = 1$ تابع f' ریشه مضاعف دارد و در نقطه $x = 2$ تابع f' از مثبت به منفی علامتش عوض می‌شود.



۱۹- در کدام بازه زیر، تابع $y = |x|(x^2 - 6x + 12)$ صعودی و تقعر آن رو به بالاست؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(1, +\infty)$ (۳) $(0, 2)$ (۴) $(-2, 2)$

پاسخ: گزینه ۱

بازه‌ای مورد نظر است که هم f' مثبت است و هم f'' .

روش اول:

تابع را به دو ضابطه تبدیل می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x & x \geq 0 \\ -x^3 + 6x^2 - 12x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12x + 12 & x > 0 \\ -3x^2 + 12x - 12 & x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x - 12 & x > 0 \\ -6x + 12 & x < 0 \end{cases}$$

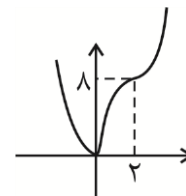
x	0	2
f'	-	+
f	↓	↑

x	0	2
f''	+	-
f	∪	∩

در بازه $(2, +\infty)$ تابع صعودی و تقعر رو به بالا دارد.

روش دوم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = x^3 - 6x^2 + 12x = (x-2)^3 + 8 \\ x < 0 \rightarrow y = -x^3 + 6x^2 - 12x = -(x-2)^3 - 8 \end{cases}$$



در بازه $(2, +\infty)$ تابع صعودی و تقعر رو به بالا دارد.

۲۰- در یک دوزنقه یک قاعده ۶ برابر قاعده دیگر است. خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند، مساحت دوزنقه را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

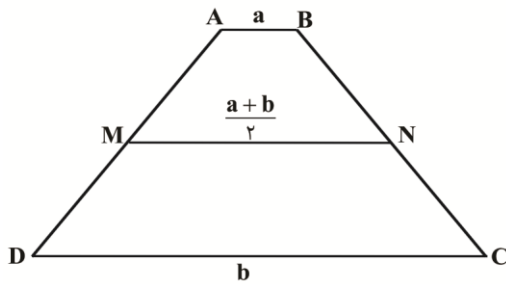
- (۱) $\frac{22}{9}$ (۲) $\frac{19}{9}$ (۳) $\frac{20}{9}$ (۴) $\frac{17}{9}$

پاسخ: گزینه ۲

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



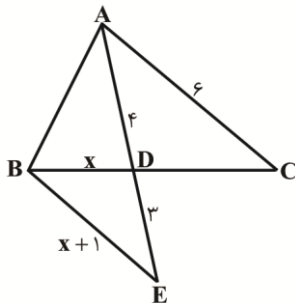
نکته: پاره خط واصل بین وسط‌های ساق‌های دوزنقه، واسطه حسابی قاعده‌هاست.



ارتفاع دو دوزنقه ایجاد شده با هم برابرند.

$$\frac{S_{MNCD}}{S_{ABNM}} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + b \right)}{\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + a \right)} = \frac{a+3b}{b+3a} \xrightarrow{b=6a} \frac{S_{MNCD}}{S_{ABNM}} = \frac{a+3(6a)}{6a+3a} = \frac{19}{9}$$

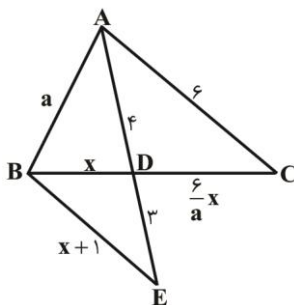
۲۱- در شکل زیر، AE نیم‌ساز راس A است، محیط مثلث ABD کدام است؟



- ۱۵ (۱)
- ۱۳ (۲)
- ۱۴ (۳)
- ۱۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

در مثلث ABC، اندازه نیم‌ساز AD را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{x}{3} \Rightarrow DC = \frac{6}{a} x$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC \Rightarrow 16 = 6a - \frac{6}{a} x^2 \Rightarrow a^2 - x^2 = \frac{8a}{3}$$

در مثلث ABE قضیه استوارت را اعمال می‌کنیم:

$$BE^2 \times AD + AB^2 \times DE = BD^2 \times AE + ED \times DA \times AE \Rightarrow 4(x+1)^2 + 3a^2 = x^2 \times 7 + 3 \times 4 \times 7$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 + 3a^2 = 7x^2 + 84 \Rightarrow 3(a^2 - x^2) + 8x = 80 \xrightarrow{a^2 - x^2 = \frac{8a}{3}} 8a + 8x = 80 \Rightarrow a + x = 10$$

$$P_{ABD} = a + x + 4 = 10 + 4 = 14$$

۲۲- نقطه M روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB قرار دارد، فاصله M از AB برابر ۱/۲ است، اگر از M بر AB عمود کنیم، اندازه دو پاره

خط ایجاد شده بر AB، x و x+۰/۴۴ خواهد شد. طول قطر نیم‌دایره چقدر است؟

۲/۴۴ (۴)

۲/۸۱ (۳)

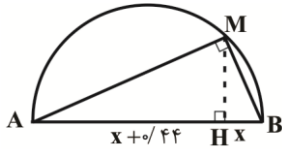
۲/۳۸ (۲)

۲/۵۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



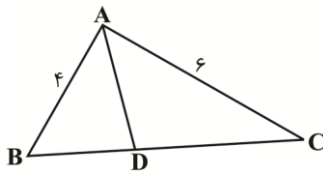


زاویه M محاطی روبرو به قطر دایره است، پس $\hat{M} = 90^\circ$ خواهد بود. در مثلث قائم الزاویه AMB، ارتفاع وارد بر وتر است.

$$MH^2 = AH \times HB \Rightarrow (1/2)^2 = x(x + 0/44) \Rightarrow 1/44 = x^2 + 0/44x \Rightarrow x^2 + 0/44x - 1/44 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$AB = 2x + 0/44 = 2 \times 1 + 0/44 = 2/44$$

۲۳- در مثلث ABC، $\angle A = 120^\circ$ است، اندازه نیمساز AD چقدر است؟



(۱) ۲/۸

(۲) ۲/۶

(۳) ۲/۴

(۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۳

چون AD نیمساز است، پس:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} BD = 2x \\ DC = 3x \end{cases}$$

طبق قضیه کسینوس‌ها داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A} \Rightarrow (5x)^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 16 + 36 + 24 = 76 \Rightarrow 5x = \sqrt{76} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \sqrt{76}$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 4 \times 6 - \frac{2}{5} \sqrt{76} \times \frac{3}{5} \sqrt{76}$$

$$= 24 - \frac{2 \times 3 \times 76}{25} = 24 - 18/24 = 5/76 \Rightarrow AD = 2/4$$

۲۴- اگر بازتاب نقطه A(۳, ۱) نسبت به خط $L: 2x + y = 0$ نقطه B و بازتاب نقطه B نسبت به خط $L': 2y - x = -5$ نقطه C باشد،

در این صورت عرض نقطه C کدام است؟

(۴) -۴

(۳) -۳

(۲) -۵

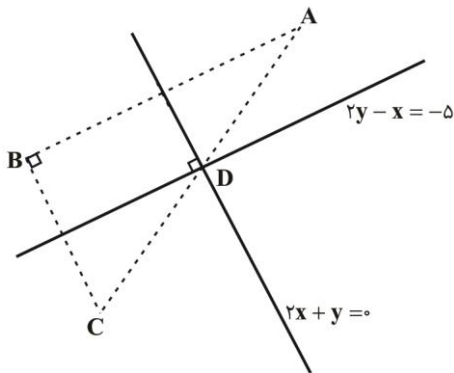
(۱) -۶

پاسخ: گزینه ۲



دو خط داده شده بر هم عمودند.

پس با توجه به شکل کافی است، قرینه نقطه A را نسبت به نقطه D که محل تقاطع دو خط است بدست آوریم:

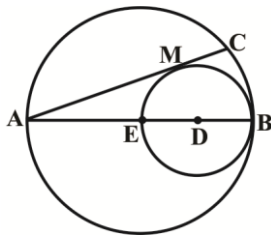


$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y-x=-5 \end{cases} \xrightarrow{+} 5y=-10 \Rightarrow y=-2, x=1 \Rightarrow D(1, -2)$$

قرینه نقطه A نسبت به D برابر است با:

$$C=2D-A=(2, -4)-(3, 1)=(-1, -5)$$

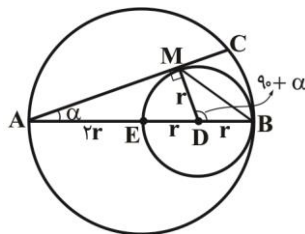
۲۵- در شکل زیر، دو دایره مماس درون هستند. E و D مراکز دو دایره و وتر AC از دایره بزرگتر در نقطه M بر دایره کوچکتر مماس است، اندازه وتر MB چند برابر شعاع دایره کوچکتر است؟



- (۱) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$
- (۲) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$
- (۳) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$
- (۴) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

از M به D و B وصل می کنیم. مثلث AMD در راس M قائمه است.



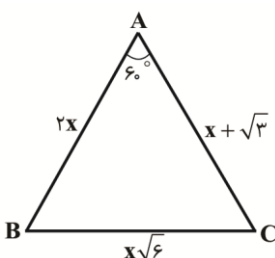
$$\triangle AMD: \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\triangle MDB: MB^2 = r^2 + r^2 - 2r \times r \cos(90^\circ + \alpha) = 2r^2 + 2r^2 \sin \alpha = 2r^2 + 2r^2 \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow MB^2 = \frac{8}{3}r^2 \Rightarrow \frac{MB}{r} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۲۶- محیط مثلث مقابل چقدر است؟

- (۱) $3+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$
- (۲) $3+\sqrt{3}+\sqrt{6}$
- (۳) $3+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$
- (۴) $2+\sqrt{3}+\sqrt{6}$



هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۲

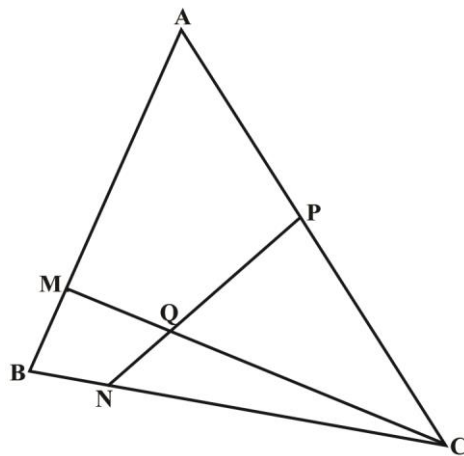
به کمک قضیه کسینوس ها مقدار X را بدست می آوریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow (x\sqrt{6})^2 = (2x)^2 + (x + \sqrt{3})^2 - 2(2x)(x + \sqrt{3}) \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 6x^2 = 4x^2 + x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 - 2x\sqrt{3} - 2x\sqrt{3} \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$2p = 2x + x + \sqrt{3} + x\sqrt{6} = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

۲۷- در شکل زیر، $AP = 5$ ، $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB} = 5$ و $\frac{QC}{QM} = \frac{5}{2}$ است، اندازه پاره خط MN چقدر است؟



- (۱) $\frac{10}{7}$
- (۲) $\frac{9}{7}$
- (۳) $\frac{7}{10}$
- (۴) $\frac{7}{9}$

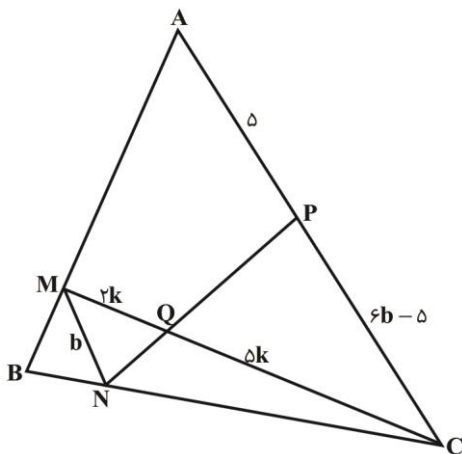
پاسخ: گزینه ۱

از M به N وصل می کنیم. چون $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB} = 5$ است. پس اولاً $MN \parallel AC$

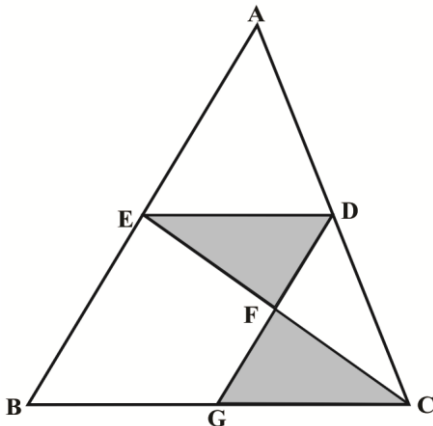
و ثانیاً $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{6}$ خواهد بود، پس اگر $MN = b$ فرض شود، $AC = 6b$ خواهد بود و در نتیجه $PC = 6b - 5$ است. ضمناً دو مثلث QPC و MNQ متشابهند و

چون $\frac{QC}{QM} = \frac{5}{2}$ است، می توان نسبت $\frac{PC}{MN}$ را نیز $\frac{5}{2}$ در نظر گرفت.

$$\frac{6b - 5}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5b = 12b - 10 \Rightarrow b = \frac{10}{7}$$

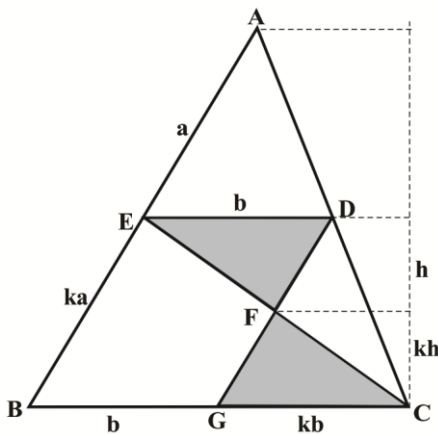


۲۸- در مثلث ABC ، مساحت دو قسمت رنگی با هم برابر و چهارضلعی $EDGB$ متوازی الاضلاع است، مساحت دوزنقه $EDCB$ چند برابر مساحت مثلث EFD است؟



- (۱) ۸
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

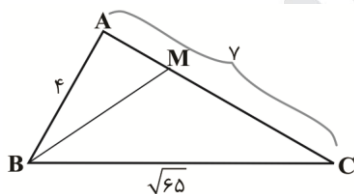


فرض می‌کنیم که $AE = a$ و $EB = ka$ باشد، بر اساس این فرض، بقیه اضلاع را طبق قضیه تالس نام‌گذاری می‌کنیم، ضمناً دو مثلث EDF ، FGC متشابهند و نسبت ارتفاع‌ها با نسبت اضلاع برابر خواهد بود.

$$S_{EDF} = S_{FGC} \Rightarrow \frac{bh}{2} = \frac{kb \times kh}{2} \Rightarrow k = 1$$

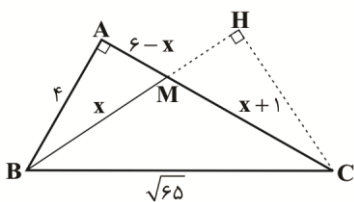
$$\frac{S_{EDCB}}{S_{EFD}} = \frac{\frac{1}{2}(b + (k+1)b)(k+1)h}{\frac{1}{2}hb} = (k+2)(k+1) = (3)(2) = 6$$

۲۹- در شکل زیر، $MC = BM + 1$ است، فاصله نقطه C از امتداد BM چقدر است؟



- (۱) $\frac{65}{13}$
(۲) $\frac{66}{13}$
(۳) $\frac{64}{13}$
(۴) $\frac{67}{13}$

پاسخ: گزینه ۳



چون $(\sqrt{65})^2 = 4^2 + 7^2$ است، پس مثلث ABC در راس A قائمه است.

$$\Delta ABM: x^2 = 4^2 + (6-x)^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 36 - 12x + x^2 \Rightarrow 12x = 52 \Rightarrow x = \frac{13}{3}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



در مثلث BMC مساحت را برای ارتفاع و قاعده دو ضلع مثلث اعمال می کنیم:

$$CH \times BM = AB \times MC \Rightarrow CH \times x = 4 \times (x+1) \Rightarrow CH = \frac{4(\frac{13}{3} + 1)}{\frac{13}{3}} = \frac{4 \times 16}{13} = \frac{64}{13}$$

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و ماتریس X جواب معادله $(A^{-1})^2 X = A$ باشد، مجموع درایه های ماتریس X^{-1} کدام است؟

- (۱) $-\frac{15}{8}$ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) -۳

پاسخ: گزینه ۳

طرفین رابطه داده شده را از چپ دوبار در A ضرب می کنیم:

$$AAA^{-1}A^{-1}X = AAA \Rightarrow X = A^3$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه ها ۲ است.

۳۱- جواب های معادله $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & x-1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 11 & x-2 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- (۱) ۳ و -۲ (۲) ۲ و -۳ (۳) ۳ و -۲ (۴) ۳ و ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$(x-2)(10-2(x-2)) + 1(3 \times 10 - 2 \times 11) + (x-1)(3(x-2) - 1 \times 11) + x + 1 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(14-2x) + 8 + (x-1)(3x-17) + x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 14x - 2x^2 - 28 + 4x + 8 + 3x^2 - 17x - 3x + 17 + x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

۳۲- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $\begin{cases} 1 & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$ باشد، مجموع درایه های ماتریس A^{1400} چقدر است؟

- (۱) ۱۳۹۹ (۲) ۱۴۰۱ (۳) ۱۴۰۰ (۴) ۱۴۰۲

پاسخ: گزینه ۴

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به کمک استقرا مشخص می شود که $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ پس $A^{1400} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و در نتیجه مجموع درایه ها ۱۴۰۲ است.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۳۳- معادله دایره‌ای که بر دو خط $\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=8 \end{cases}$ مماس باشد و مرکز آن روی خط $x-2y=0$ قرار گیرد کدام است؟

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 18 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y + 18 = 0 \quad (1)$$

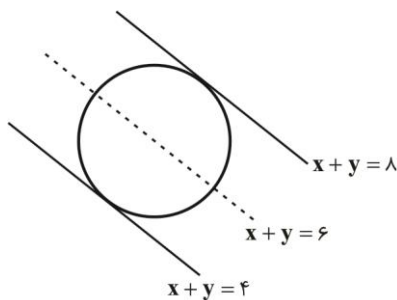
$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 18 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

نکته: مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی $\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=c' \end{cases}$ به یک فاصله باشند، خط $ax+by=\frac{c+c'}{2}$ است.

در این مسئله مرکز دایره روی خط $x+y=\frac{8+4}{2}=6$ قرار دارد. از طرفی مرکز دایره روی خط $x=2y$ قرار دارد پس محل برخورد این دو خط مرکز دایره خواهد بود.



$$\begin{cases} x+y=6 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow 2y+y=6 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=4$$

پس مرکز دایره $W(4, 2)$ است.

برای محاسبه شعاع دایره کافی است فاصله دو خط $x+y=6$ و $x+y=8$ را حساب کنیم.

$$r = \frac{|8-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

پس معادله دایره برابر است با:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 4y + 18 = 0$$

۳۴- نقطه M روی دایره $C: x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ و نقطه N روی دایره $C': x^2 + y^2 + 10x - 12y + 60 = 0$ حرکت می‌کند.

بیشترین فاصله MN چقدر است؟

$$5+9\sqrt{2} \quad (4)$$

$$6+9\sqrt{2} \quad (3)$$

$$4+9\sqrt{2} \quad (2)$$

$$5+8\sqrt{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

مرکز و شعاع دو دایره را بدست می‌آوریم:

$$C: W(4, -3), r = \sqrt{16+9-9} = 4$$

$$C': W'(-5, 6), r' = \sqrt{25+36-60} = 1$$

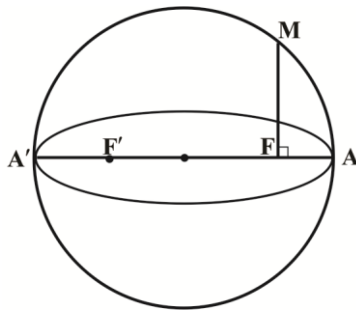
$$d = WW' = \sqrt{(9)^2 + (9)^2} = 9\sqrt{2}$$

چون $d > r+r'$ است، پس دو دایره متخارج‌اند و بیشترین فاصله MN برابر $d+r+r'$ خواهد بود.

$$\text{Max}(MN) = d+r+r' = 5+9\sqrt{2}$$

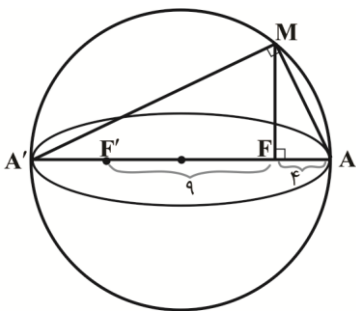


۳۵- در بیضی شکل مقابل دایره‌ای به قطر AA' رسم کرده‌ایم و خط عمود بر AA' در F را امتداد داده‌ایم تا دایره را در M قطع کند. اگر قطرهای بیضی ۱۷ و $4\sqrt{13}$ باشند، طول پاره خط AM چقدر است؟



- (۱) $2\sqrt{14}$
(۲) $\sqrt{13}$
(۳) $2\sqrt{13}$
(۴) $2\sqrt{17}$

پاسخ: گزینه ۴



$$2a = 17 \Rightarrow a = \frac{17}{2}$$

$$2b = 4\sqrt{13} \Rightarrow b = 2\sqrt{13}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{289}{4} - 52 = \frac{81}{4} \Rightarrow c = \frac{9}{2}$$

زاویه M قائمه است، پس:

$$MA^2 = AF \times AA' \Rightarrow MA^2 = 4 \times 17 \Rightarrow MA = 2\sqrt{17}$$

۳۶- اگر خط تقارن سهمی $y^2 - p(y + 2x) = p$ ، خط $y = 2$ باشد، مختصات کانون سهمی کدام است؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(1, 2)$

پاسخ: گزینه ۴

اگر در سهمی نسبت به عامل درجه دوم مشتق بگیریم و آن را برابر صفر قرار دهیم، معادله خط تقارن بدست می‌آید.

$$2y - p = 0 \xrightarrow{y=2} 4 - p = 0 \Rightarrow p = 4$$

$$y^2 - 4y = 4x + 4 \xrightarrow{+4} (y-2)^2 = 4(x+1) \Rightarrow \begin{cases} h = -1 \\ k = 2 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$F = (1, 2)$$

در سهمی افقی که دهانه به راست باز می‌شود، مختصات کانون $(h+a, k)$ است:

۳۷- اگر اندازه تصویر بردار $\vec{u}$ روی صفحات xoy ، xoz و yoz به ترتیب $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{10}$ و $\sqrt{13}$ باشد، اندازه بردار $\vec{u}$ چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{13}$ (۲) $\sqrt{15}$ (۳) $\sqrt{14}$ (۴) $\sqrt{28}$

پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



بردار u را به صورت $\vec{u} = (a, b, c)$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \\ \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{13} \Rightarrow b^2 + c^2 = 13 \\ \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 + c^2 = 10 \end{cases} \xrightarrow{+} 2(a^2 + b^2 + c^2) = 28 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 14$$

پس $|\vec{u}| = \sqrt{14}$ است.

۳۸- در گزاره "اگر خوب درس بخوانی، آن گاه موفق می‌شوی":

- (۱) خوب درس خواندن شرط لازم برای موفق شدن است.
- (۲) خوب درس خواندن شرط لازم و کافی برای موفق شدن است.
- (۳) خوب درس خواندن شرط کافی برای موفق شدن است.
- (۴) خوب درس خواندن برای "موفق شدن" نه شرط لازم است و نه شرط کافی.

پاسخ: گزینه ۳

نکته: در گزاره $(p \Rightarrow q)$ شرط کافی برای q است و q شرط لازم برای p است.

در این جا: "خوب درس خواندن" را p و "موفق شدن" را q می‌نامیم. عبارت داده شده $p \Rightarrow q$ است، پس p یعنی "خوب درس خواندن" شرط کافی، برای q یعنی "موفق شدن" است، پس جواب گزینه ۳ است.

۳۹- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = 4\}$ آن گاه $|A \times B|$ کدام است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۱۵ (۳) ۹ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲

خوب به تفاوت دو مجموعه A و B توجه کنید: $(1, \sqrt{3})$ در $x^2 + y^2 = 4$ صدق می‌کند و $1 \in A$ است، ولی با توجه به این که $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ ، $1 \notin B$.

$$\begin{aligned} A = \{0, \pm 1, \pm 2\} &\rightarrow |A| = 5 \\ B = \{0, \pm 2\} &\rightarrow |B| = 3 \end{aligned} \rightarrow |A \times B| = 15$$

۴۰- مجموعه توانی مجموعه $P(A)$ دارای 2^{16} زیرمجموعه است، A دارای چند عضو است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۲

نکته: $P(A)$ یا مجموعه توانی A مجموعه همه زیرمجموعه‌های A است و تعداد اعضای آن $2^{|A|}$ است.

مجموعه توانی مجموعه $P(A)$ یک مجموعه $2^4 = 16$ عضوی است چون 2^{16} زیرمجموعه دارد. پس مجموعه $P(A)$ دارای $2^2 = 4$ عضو است یعنی A دارای ۲ عضو است.

۴۱- از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دو زیرمجموعه متفاوت به تصادف انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی این ۲ زیرمجموعه

متکم هم هستند؟

(۱) $\frac{2}{63}$ (۲) $\frac{1}{64}$ (۳) $\frac{1}{32}$ (۴) $\frac{1}{63}$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۴

A دارای $2^6 = 64$ زیرمجموعه است، اولین زیرمجموعه‌ای که انتخاب می‌کنیم، مهم نیست، از 63 زیرمجموعه دیگر باید متمم مجموعه اول را انتخاب کنیم که ۱ حالت دارد، یعنی احتمال $\frac{1}{63}$ است.

۴۲- در پرتاب سه تاس، احتمال این که مجموع سه تاس کمتر از ۱۱ بیاید، کدام است؟

$$\frac{1}{2} (۱) \quad \frac{1}{3} (۲) \quad \frac{3}{5} (۳) \quad \frac{5}{9} (۴)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: در پرتاب سه تاس احتمال آن که مجموع X بیاید با احتمال آن که مجموع $21 - X$ بیاید برابر است. با توجه به نکته فوق، احتمال آن که مجموع ۱۰ بیاید، با احتمال اینکه مجموع ۱۱ بیاید، برابر است، احتمال اینکه مجموع ۹ بیاید با احتمال اینکه مجموع ۱۲ بیاید برابر است و... احتمال آن که مجموع ۳ بیاید با احتمال آن که مجموع ۱۸ بیاید برابر است. یعنی احتمال آن که کمتر از ۱۱ بیاید با احتمال آن که بیشتر یا مساوی ۱۱ باشد برابر است، پس:

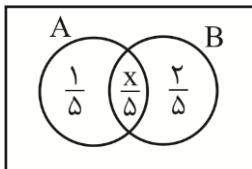
$$P(\text{مجموع کمتر از } ۱۱) = P(\text{مجموع بزرگ‌تر یا مساوی } ۱۱) = \frac{1}{2}$$

۴۳- اگر $P(A - B) = \frac{1}{5}$ و $P(B - A) = \frac{2}{5}$ و $2P(B') = 2P(A')$ باشد، آنگاه $P(A' \cap B')$ کدام است؟

$$\frac{2}{5} (۱) \quad \frac{1}{10} (۲) \quad \frac{1}{5} (۳) \quad \frac{3}{10} (۴)$$

پاسخ: گزینه ۳

به نمودار ون مقابل دقت کنید:



$$2P(B') = 2P(A') \rightarrow 2(1 - P(A)) = 2(1 - P(B))$$

$$\rightarrow 2 + 2P(B) = 2 + 2P(A) \quad \begin{matrix} P(A) = \frac{x+1}{5} \\ P(B) = \frac{x+2}{5} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \frac{2(x+2)}{5} = 1 + \frac{2(x+1)}{5} \quad \times 5 \rightarrow 2x + 4 = 5 + 2x + 2$$

$$\rightarrow x = 1 \rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow P(A' \cap B') = \frac{1}{5}$$

۴۴- اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه

پیشامد باشند، به‌طوریکه $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ مقدار $P(C')$ کدام است؟

$$\frac{1}{5} (۴) \quad \frac{1}{7} (۳) \quad \frac{9}{35} (۲) \quad \frac{11}{35} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$C' = S - C = \{a, b, c, d, e\} - \{a, b, e\} = \{c, d\}$$

از طرفی:

$$B - A = \{a, b, c, d\} - \{a, b\} = \{c, d\}$$

پس داریم:

$$P(C') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

اما چون $A \subseteq B$ است، $A \cap B = A$ می باشد، یعنی:

$$P(C') = P(B) - P(A) = \frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{21-10}{35} = \frac{11}{35}$$

۴۵- اگر در فرمول بازه اطمینان، اندازه نمونه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان می یابد و اگر انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان می یابد.

(۱) کاهش - کاهش (۲) افزایش - افزایش (۳) کاهش - افزایش (۴) افزایش - کاهش

پاسخ: گزینه ۳

با افزایش اندازه نمونه، دقت برآورد افزایش پیدا می کند، یعنی طول فاصله اطمینان کم می شود و با افزایش انحراف معیار جامعه، دقت برآورد کاهش پیدا می کند و طول فاصله اطمینان افزایش می یابد.

۴۶- اعداد شش رقمی به صورت $\overline{abcabc}$ بر کدام گزینه ممکن است، بخش پذیر نباشد؟

(۱) ۱۹ (۲) ۷ (۳) ۱۱ (۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۱

$$\overline{abcabc} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001\overline{abc}$$

و ۱۰۰۱ بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است، پس $\overline{abcabc}$ بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است ولی ممکن است بر ۱۹ بخش پذیر نباشد.

۴۷- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۵۳، خارج قسمت q و باقی مانده ۳۱ است، در تقسیم $2a - 3$ بر ۵۳، خارج قسمت کدام است؟

(۱) $2q - 3$ (۲) $2q$ (۳) $2q - 2$ (۴) $2q + 1$

پاسخ: گزینه ۴

$$a = 53q + 31 \xrightarrow{\times 2, - 3} 2a - 3 = 53 \times 2q + 31 \times 2 - 3 \rightarrow 2a - 3 = 53 \times (2q) + \underbrace{59}_{53+6} \rightarrow 2a - 3 = 53 \times (2q + 1) + 6$$

خارج قسمت

۴۸- اگر $(a, b) = 1$ و $a | c$ ، آنگاه (c, b) کدام است؟

(۱) ۱ (۲) a (۳) b (۴) c

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$(c, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|b \\ d|c \xrightarrow{c|a} d|a \end{cases}$$

d مقسوم علیه مشترک و مثبت b, a است. با توجه به این که $(a, b) = 1$ ، a, b مقسوم علیه مشترک مثبتی بجز ۱ ندارند، پس $d = 1$.

۴۹- معادله سیالۀ $(2a-2)x + (a+2)y = 1$ به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی a دارای جواب است؟

۷۵ (۴)

۳۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱ (صفر)

پاسخ: گزینه ۳

برای این که $(2a-2)x + (a+2)y = 1$ دارای جواب باشد، باید $(2a-2, a+2) | 1$ از طرفی:

$$(2a-2, a+2) = (2a-2-2(a+2), a+2) = (-6, a+2) = d \rightarrow$$

$$d|6 \rightarrow \begin{cases} d=6 \rightarrow 6 \nmid 1 \times \\ d=2 \rightarrow 2 \nmid 1 \times \\ d=3 \rightarrow 3 \nmid 1 \times \\ d=1 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$۱) d=2 \rightarrow 2|a+2 \rightarrow 2|a \xrightarrow{\text{عدد دو رقمی}} a = \underbrace{2 \times 5, 2 \times 6, \dots, 2 \times 49}_{\text{حالت ۴۵}}$$

$$۲) d=3 \rightarrow 3|a+2 \rightarrow a+2=3k \rightarrow a=3k-2 \rightarrow a = \underbrace{3 \times 4 - 2, 3 \times 5 - 2, \dots, 3 \times 33 - 2}_{\text{حالت ۳۰}}$$

$$(۱) \cap (۲) \rightarrow \underbrace{3 \times 4 - 2, 3 \times 6 - 2, \dots, 3 \times 32 - 2}_{\text{حالت ۱۵}}$$

طبق اصل شمول و عدم شمول:

$$(۱) - (۲) + (۱) \cap (۲) = \text{کل اعداد دو رقمی} = \text{جواب}$$

$$90 - 45 - 30 + 15 = 30$$

۵۰- در گراف G از مرتبه ۸ و اندازه ۲۳، مینیمم درجه حداقل چقدر است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

برای این که مینیمم درجه کمترین مقدار باشد، یک رأس را کنار می گذاریم، یال ها را بین بقیه رأس ها تقسیم می کنیم، هر چند یال که زیاد آمد حداقل مینیمم درجه است و تعداد یال هایی است که به رأس کنار گذاشته می رسد.

یک رأس را کنار بگذاریم ۷ رأس می ماند که $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ یال از ۲۳ یال بین این ۷ رأس می تواند قرار بگیرد ۲ یال دیگر می ماند که درجه رأس هشتم و حداقل δ است.

$$\delta_{\min} = 2$$

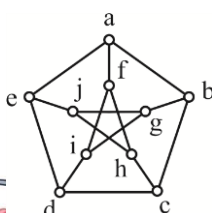
۵۱- گراف روبه رو چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد که شامل رأس های a, c است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)



هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۴

مینیمال ۳ عضوی یکی دارد $\{a, c, g\}$
مینیمال ۴ عضوی هم یکی دارد $\{a, c, i, j\}$
مینیمال ۵ عضوی دو تا دارد $\{a, b, c, d, e\}$ و $\{a, b, c, h, f\}$

۵۲- می خواهیم روی تعدادی جعبه کدگذاری کنیم و هر جعبه را با یک کد، شامل ۸ حرف از بین ۹ حرف a, a, a, b, b, b, c, c از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۱۴۰ (۱) ۴۲۰ (۲) ۶۳۰ (۳) ۱۲۶۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

نکته: تعداد تبدیل های $\pi - 1$ شیء از π شیء (متمايز يا غير متممايز) با تعداد تبدیل های π شیء از π شیء برابر است.
درسته این جا تعداد جایگشت های ۸ حرفی از بین ۹ حرف داده شده را می خواهد، ولی طبق نکته بالا این تعداد با تعداد جایگشت های ۹ حرفی از بین ۹ حرف داده شده برابر است.

$$\frac{9!}{3!4!2!} = 1260$$

۵۳- اگر A مربع لاتین مرتبه ۵ و چرخشی باشد و B مربع لاتین متعامد با آن، مجموع درایه های قطر اصلی مربع A به اضافه مجموع درایه های قطر اصلی مربع B کدام است؟

۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

درایه های قطر اصلی مربع لاتین چرخشی همگی ۱ هستند از طرفی چون در A این درایه ها یکسانند، در B که متعامد با A است، باید درایه های قطر اصلی همگی متممايز باشند، یعنی مجموع درایه های قطر اصلی مربع A ، ۵ و مجموع درایه های قطر اصلی مربع B ، $1+2+3+4+5=15$ جمع این دو عدد گزینه ۲ است.

۵۴- در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند، اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند، چند نفر دقیقاً در دو رشته بازی می کنند؟

۳ (۱) ۵ (۲) ۱۱ (۳) ۱۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

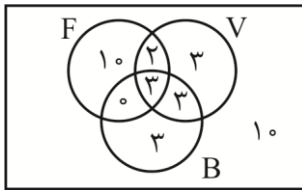
از ۳۴ نفر، ۱۰ نفر هیچ ورزشی نمی کنند، یعنی ۲۴ نفر حداقل یک ورزش انجام می دهند، با توجه به اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$|F \cup V \cup B| = |F| + |V| + |B| - |F \cap V| - |F \cap B| - |B \cap V| + |F \cap B \cap V| \rightarrow |F \cap B \cap V| = 3$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



حال به نمودار ون توجه کنید:



$5 = 3 + 2 + 0 =$ دقیقاً در دو رشته بازی می کنند

۵۵- حداقل چند نقطه با مختصات صحیح در صفحه اختیار کنیم تا مطمئن باشیم این نقاط هر چه باشند در بین آنها دو نقطه وجود دارد که مختصات نقطه وسط آن دو نقطه نیز صحیح است؟

۹ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

هر نقطه در صفحه دو مولفه دارد، طول و عرض. اگر مجموع طول دو نقطه زوج باشد، طول نقطه وسط عددی صحیح می شود، مشابه همین مطلب در مورد عرض نقاط هم درست است. فقط زمانی جمع دو عدد زوج می شود که یا هر دو فرد باشند یا هر دو زوج. برای طول ها دو حالت زوج و فرد داریم و برای عرض ها نیز همین طور. یعنی نقاط با مختصات صحیح در صفحه ۴ شکل دارند (زوج، زوج)، (فرد، زوج)، (زوج، فرد)، (فرد، فرد) که هر کدام نقش یک لانه دارند. می خواهیم دو نقطه داشته باشیم که طول هایشان از لحاظ زوج و فرد شبیه به هم و عرض هایشان نیز شبیه به هم باشند. اگر ۵ نقطه (که نقش کبوتر را دارند) با مختصات صحیح داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه در بینشان است که طول آن دو نقطه از لحاظ زوج یا فرد بودن مانند هم است و عرض آن دو نقطه نیز از لحاظ زوج و فرد بودن مثل هم است. یعنی مختصات جمع دو نقطه زوج است و مختصات نقطه وسط آن دو نقطه نیز عددی صحیح است.

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

